

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**  
**DEPARTAMENTO ACADEMICO DE CIENCIAS BÁSICAS**



**DISCRETIZACIÓN Y SOLUCIÓN NUMÉRICA**  
**DE UNA LOSA**

**Curso: MÉTODOS NUMÉRICOS**

NINA MINAYA, Jhostyn Eduardo

Email: Jhostyn.nina.26@gmail.com

PAREDES PORTALES, Angel Vladimir

Email: angelpp9517@gmail.com

QUISPE ASTETE, Elard Roque

email: lynx\_k104@hotmail.com

RIMAC COLCAS, Christian Roberth

email :christianrc\_10@hotmail.com

**RESUMEN:** *El presente trabajo tiene la finalidad de estimar la deformación de una losa bajo la acción de una carga uniforme empleando como herramientas numérica el método Método de Elementos Finitos y el de Diferencias Finitas. Para conceptualizar el modelo de la losa se requiere conocimiento de la teoría de losas delgadas (específicamente la teoría de placas delgadas de Kirchoff), el uso del software Matlab R2012 y la aplicación de distintos métodos numéricos que fueron desarrollados en el curso tales como integración numérica, métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y diferencias finitas. Para verificar los resultados calculados con ambos métodos, se comparan los mismos con el programa ETABS V9.7.0-L.*

**I.OBJETIVOS:**

- ✦ Aplicación del curso a problemas relacionados a la ingeniería estructural.
- ✦ El estudiante de pregrado debe aprender el manejo y formulación de problemas de elementos finitos como herramienta numérica para resolver problemas de ingeniería.
- ✦ Identificar las ventajas y desventajas que presenta cada método teniendo la flexibilidad de su aplicación en diferentes campos.
- ✦ Hacer uso de los métodos numéricos en la solución de problemas que se presentan durante el desarrollo del proyecto.

## II. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA:

## III. DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN:

### 3.1 PLANTEAMIENTO DE LA ECUACIÓN DE UNA LOSA

Desde ya hace 2 siglos la teoría más clásica de losas delgadas se basa en las hipótesis formalizadas por Kirchhoff en 1850, las cuales consideran que las normales al plano medio se mantienen rectas y ortogonales a la deformación de dicho plano. Las hipótesis sobre las que se basa la teoría de losas de Kirchhoff son:

- ✚ La deflexión del plano medio es pequeña en comparación con el espesor de la losa. De igual modo, es asimismo muy pequeña la pendiente de la superficie elástica.
- ✚ No hay deformación en la superficie elástica de la losa. Esta superficie permanece neutra durante la flexión.
- ✚ Los esfuerzos normales en la dirección perpendicular al plano de la losa  $\sigma_z$ , son despreciables. De este modo, se puede considerar en cada plano horizontal la existencia en un estado plano de esfuerzos.
- ✚ Los puntos situados inicialmente en una línea normal al plano medio de la losa permanecen, después de la flexión, sobre una recta perpendicular a la superficie elástica de la losa deformada; además, las distancias entre dichos puntos se mantienen invariables.

Asimismo, después del análisis de la losa la ecuación diferencial que rige su deformación o flecha es:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1)$$

Donde:

w: Flecha en el punto x,y  
 p: Carga en el punto x,y  
 t: Espesor de la losa

$\nu$ : Constante de Poisson  
 E: Módulo de Elasticidad

De la misma forma también se consideran las siguientes condiciones de frontera:

$$P = \begin{cases} U_{(x,y)=0}, & (x,y) \in \Gamma (\text{frontera}) \mapsto C.F. \text{Dirichlet} \\ \frac{\partial U_{(x,y)}}{\partial n} = 0, & (x,y) \in \Gamma (\text{frontera}) \mapsto C.F. \text{Newman} \end{cases}$$

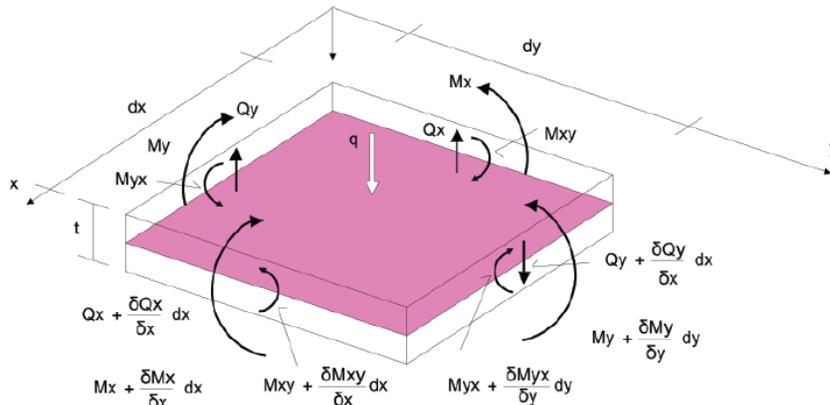


Fig.1 Equilibrio de un elemento diferencial de una placa delgada

### 3.2 DISCRETIZACIÓN Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CON DIFERENCIAS FINITAS

Este método consiste en despejar los elementos de  $\Delta^2 U(x,y)$  en función de la energía que tiene cada punto bajo la acción de la fuerza uniforme, ello con el fin de obtener la matriz de rigidez generalizada y la matriz de fuerzas, las cuales nos permitirán hallar la deformación de cada uno de los puntos de la malla considerando un "n" (Número de divisiones) determinado. En primer lugar, despejamos cada elemento de la ecuación de una losa usando diferencias finitas centrales:

$$\Delta^2 U(x,y) = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \quad (2)$$

Donde: 
$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial x^4} \quad \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial x^2 \partial y^2} \quad \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial y^4} \quad (3)$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{U_{i+2,j} - 4U_{i+1,j} + 6U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{\Delta x^4} \quad (4)$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1} - 2(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + U_{i+1,j-1} - 2U_{i,j-1} + U_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2} \quad (5)$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial y^4} = \frac{U_{i,j+2} - 4U_{i,j+1} + 6U_{i,j} - 4U_{i,j-1} + U_{i,j-2}}{\Delta y^4} \quad (6)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación original obtendremos una ecuación general que al reemplazarla en cada uno de los puntos nos permitirá obtener la matriz de rigidez y de fuerzas que se requieren, sin embargo para que tenga una forma simétrica será necesario ordenar las filas y reemplazar los valores que son nulos considerando las condiciones iniciales.

$$-U_{i,j+1} + U_{i,j} = 0 \quad i=2,3,4,\dots, N-2 \quad j=0$$

$$-U_{i+1,j} + U_{i,j} = 0 \quad j=2,3,4,\dots, N-2 \quad i=0$$

$$U_{i,j} - U_{i-1,j} = 0 \quad j=2,3,4,\dots, N-2 \quad i=N$$

$$U_{i,j} - U_{i,j-1} = 0 \quad i=2,3,4,\dots, N-2 \quad j=N$$

Asimismo, para completar el número de ecuaciones necesarias, observamos que:

$$U_{1,1} = 0 \quad (7)$$

$$U_{1,N-1} = 0 \quad (8)$$

$$U_{N-1,1} = 0 \quad (9)$$

$$U_{N-1,N-1} = 0 \quad (10)$$

La solución que se obtenga dependerá de la cantidad de particiones que se hagan en la losa. Para ello emplearemos el Algoritmo de Kyf, señalado en el Anexo.. A mayor número de particiones la aproximación será mucho mejor, sin embargo para valores de N muy grandes el software usado carece de la memoria suficiente para procesar una gran cantidad de datos (K de orden  $(n-1)^2$ ).

### 3.3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF):

A partir de la teoría de placas delgadas de Kirchoff, considerando las ecuaciones de equilibrio de la placa, se tiene la ecuación de la losa:

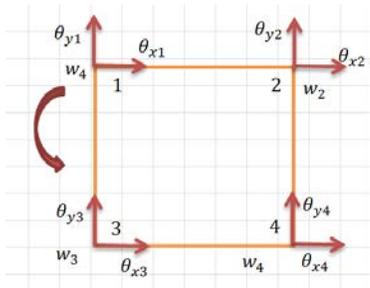
$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = \frac{q}{d}; \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1)$$

Cuya formulación variacional, genera:

$$\iint B^T D_f B da = - \int N^t q da \quad (11)$$

$$\mathcal{K} * \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

Para obtenerse la expresión anterior (11), escogemos un elemento rectangular solo por fines prácticos, ya aplicados en varios problemas estructurales que requiere el uso del MEF, y anteriormente ya desarrollados por Melosh y Zienkiewicz y Cheung.



Donde:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \quad \text{Vector de desplazamientos para uno de los nodos del elemento}$$

$$\boldsymbol{\theta}_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \boldsymbol{\theta}_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Luego se tiene la siguiente función de forma ("w(x,y)") para elementos de ese tipo:

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 y^2 x + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} y^3 x \quad (12)$$

Para determinar las 12 funciones de forma (3 por nodo), se evalúa en los 4 nodos del elemento (Para i=1,2,3,4) haciendo cumplir las condiciones del mismo, es decir:

$$w(x_i, y_i) = w_i \quad \frac{\partial w(x_i, y_i)}{\partial x} = \theta_{xi} \quad \frac{\partial w(x_i, y_i)}{\partial y} = \theta_{yi} \quad (13)$$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (14)$$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + 3\alpha_{12} y^2 x + \alpha_{11} x^3 \quad (15)$$

Agrupando las doce ecuaciones obtenidas (3 por cada nodo), se obtiene el siguiente sistema lineal para un elemento de la malla:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & y_1^2 x_1 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & y_1^2 x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & y_1 & 0 & 3x_1^2 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & 0 & 3x_1^2 y_1 & y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3y_1^2 x_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & y_2^2 x_2 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & y_2^2 x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_2 & y_2 & 0 & 3x_2^2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & 0 & 3x_2^2 y_2 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3y_2^2 x_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & y_3^2 x_3 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & y_3^2 x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_3 & y_3 & 0 & 3x_3^2 & 2x_3 y_3 & y_3^2 & 0 & 3x_3^2 y_3 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3y_3^2 x_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & y_4^2 x_4 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & y_4^2 x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_4 & y_4 & 0 & 3x_4^2 & 2x_4 y_4 & y_4^2 & 0 & 3x_4^2 y_4 & y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3y_4^2 x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}$$

De la relación:  $\omega = P^t * A^{-1} * a$  (16)

Análogamente:

- $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial P^t}{\partial x} * A^{-1} * a$  (17)

- $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 P^t}{\partial y^2} * A^{-1} * a$  (19)

- $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = -\frac{\partial P^t}{\partial x^2} * A^{-1} * a$  (18)

- $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 P^t}{\partial y \partial x} * A^{-1} * a$  (20)

De lo anterior se tiene:

$$\hat{\varepsilon}_f = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P^t}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 P^t}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 P^t}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} * A^{-1} * a \quad (21)$$

y como:  $P^t = \begin{matrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{matrix}$  (22)

$$\hat{\varepsilon}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{pmatrix} * A^{-1} * a \quad (23)$$

Así:  $\hat{\varepsilon}_f = C * A^{-1} * a = B * a$  (23)

Se tiene la matriz de material isótropo:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \text{Con } \hat{D}_f = \frac{t^3}{12} * D \quad (\text{Matriz constitutiva de flexión}) \quad (24)$$

El vector de esfuerzos ("Ley de Hooke"):  $\hat{\sigma}_f = \hat{D}_f * \hat{\varepsilon}_f$  (25)

Del principio de los trabajos virtuales:

$$\underbrace{\iiint_V \delta \varepsilon^t \sigma \, dV}_{\delta U} = \iint_A \delta \omega q \, dA \quad (26)$$

Por las características del problema de flexión de placas se permiten simplificar en:

$$\delta U = \left. \iint_A \delta \hat{\varepsilon}_f^t \hat{\sigma}_f \, dA + \iint_A \delta \omega q \, dA = 0 \right\} \text{Principio de trabajos virtuales (Formulación variacional)}$$

Reemplazando las ecuaciones Por (25) y (16):

$$\iint_A \delta \hat{\varepsilon}_f^t \hat{D}_f \hat{\varepsilon}_f \, dA + \iint_A \delta a^t N^t q \, dA = 0$$

Por (23):

$$\begin{aligned} \iint_A \delta a^t B^t \widehat{D}_f B a dA + \iint_A \delta a^t N^t q dA &= 0 & \Rightarrow \delta a^t \iint_A [B^t \widehat{D}_f B a + N^t q] dA &= 0 \\ \Rightarrow \iint_A \delta a^t [B^t \widehat{D}_f B a + N^t q] dA &= 0 & \Rightarrow \underbrace{\iint_A B^t \widehat{D}_f B dA}_{K} * a &= - \iint_A N^t q dA \quad (11) \end{aligned}$$

Con la expresión anterior queda demostrada la forma de las matrices "K" y "f" necesarios para el método, lo cual se señalaba en la ecuación (11).

$$K * a = f$$

Tenemos que:

$$: K = \iint_A B^t \widehat{D}_f B dA = \iint_A A^{-t} * C^t * \widehat{D}_f * C * A^{-1} dA$$

$$\therefore K = A^{-t} \left\{ \underbrace{\iint_A C^t * \widehat{D}_f * C dA}_{\text{matriz}} \right\} A^{-1} \quad (27)$$

$$f = - \iint_A N^t q dA = - \iint_A A^{-t} * P * q dA$$

$$\therefore f = -A^{-t} \left\{ \underbrace{\iint_A P dA}_{\text{matriz}} \right\} q \quad (28)$$

; considerando a "q" constante

Las Matrices que se encuentran en llaves, una vez programadas en Matlab, son integradas numéricamente en cada elemento para luego ser ensambladas en la matriz global de "K" y "f". Para la integración empleamos la cuadratura de Gauss-Legendre con una cantidad de 4 puntos (dos para "x" y dos para "y"). Una vez se tengan los valores generales de "K" y "f" para cualquier elemento, se empieza a reemplazar las coordenadas de los nodos dándonos sistemas de ecuaciones lineales; listos para ser resueltos por el método de "Cholesky" y obteniendo el vector columna "a" que nos hallas tanto las flechas "w" como los giros "θ<sub>x</sub>, θ<sub>y</sub>" por ello procedemos a graficar la losa ya deformada en MATLAB.

#### 4. ANALISIS DE RESULTADOS:

- Los valores obtenidos en las deformaciones por los programas de cada método son graficados en MATLAB una vez reemplazadas en cada nodo. La gráfica de la losa obtenida por cada método se muestra a continuación:

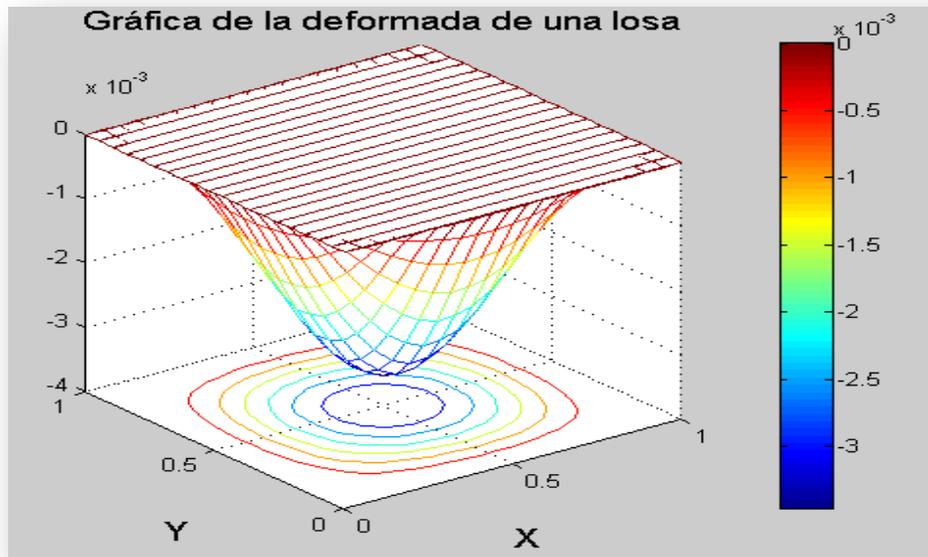


Fig.2 Deformación de la losa obtenida por el Método de Elementos Finitos

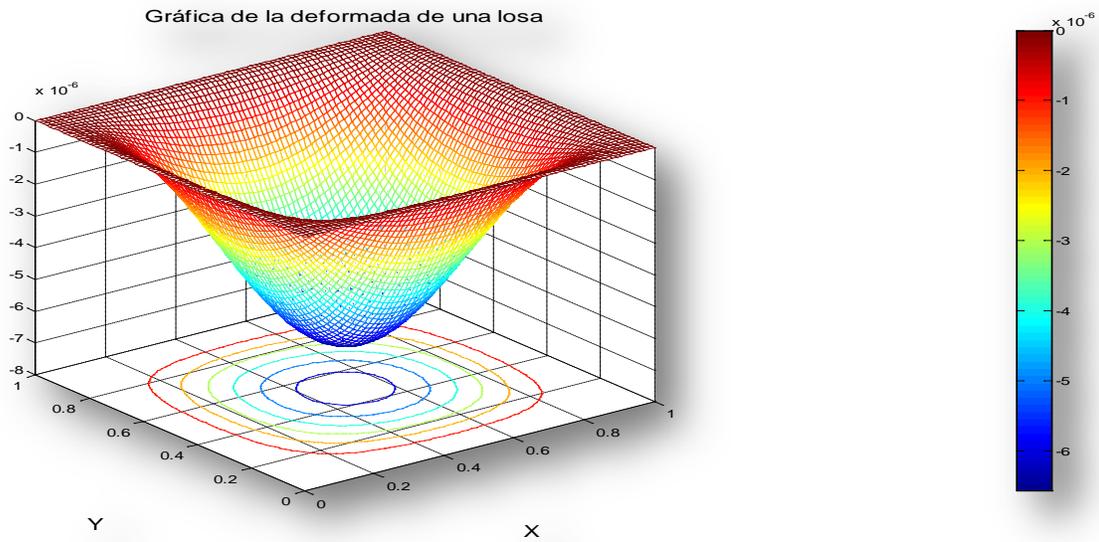


Fig.3 Deformación de la losa obtenida por el Método de Diferencias Finitas, para un  $N=45$

Durante el desarrollo del proyecto, en el método de diferencias finitas, se ha podido observar que aplicando el test de la parcela la variación en la máxima deformación muestra un comportamiento asintótico mientras mayor sea el número de divisiones, el error relativo muestra valores pequeños cuando la deformación máxima empieza a acercarse a 6.5mm, siendo éste el valor real aproximado (Fig. 4).

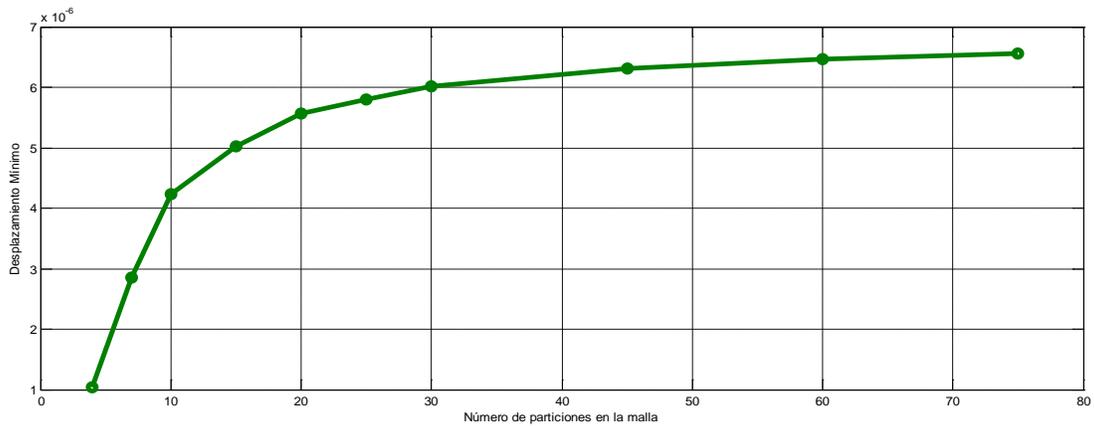


Fig.4 Test de Parcela para el análisis de convergencia en el MDF.

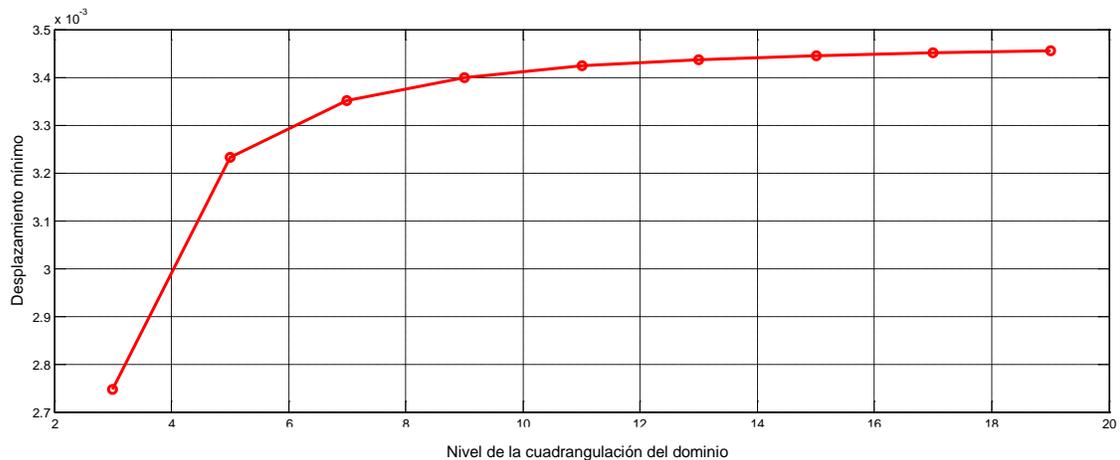


Fig.5 Test de Parcela para el análisis de convergencia en el MEF.

De igual forma, aplicando el test de Parcela en el MEF obtenemos una deformación máxima de 3.5mm como valor de convergencia. Comparando estos resultados con el programa ETABS se obtuvo un desplazamiento vertical de 8mm. La gráfica obtenida con el dicho software se muestra a continuación:

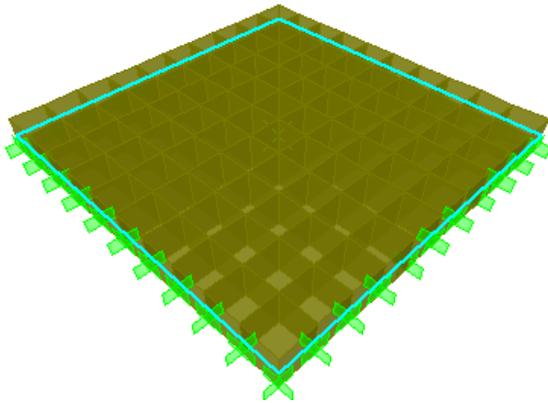


Fig.6 Obtención de la malla con 10 divisiones en cada lado

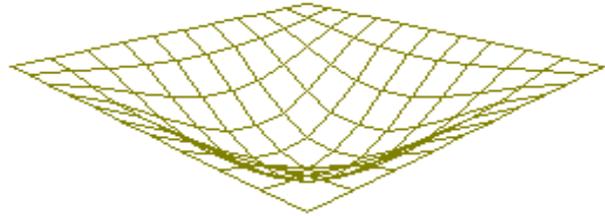
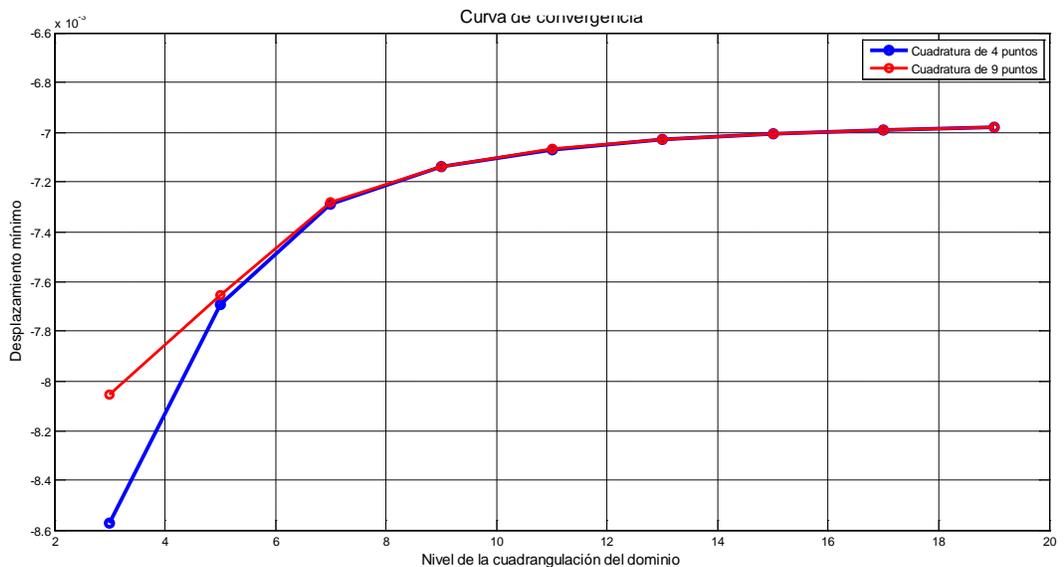


Fig.7 Gráfica de la deformación de la losa en ETABS.



## 5. CONCLUSIONES:

1. El método de los elementos finitos resulta ser versátil para problemas de este tipo en el campo estructural, a comparación al de las diferencias finitas por ser muy intuitivo.
2. Los resultados hallados con estos métodos resultan confiables, ya que se ha comparado con los resultados del programa ETabs que viene ha ser mas confiable.
3. De acuerdo a las gráficas de convergencia, usando una cuadratura de 9 puntos se obtiene mejores resultados, ya que converge más rápido. Cabe mencionar que con ambas formas es correcto el resultado ya que ambos convergen al mismo valor.
4. Si bien este trabajo ha tomado dificultad para programar y entender el método de los elementos finitos, pero se logro gracias al trabajo en equipo utilizando nuestros conocimientos del curso de Métodos Numéricos.

5. Hemos concluido también que los elementos rectangulares tienen menor complejidad al integrar como elementos finitos a comparación de los triangulares, pentagonales, etc

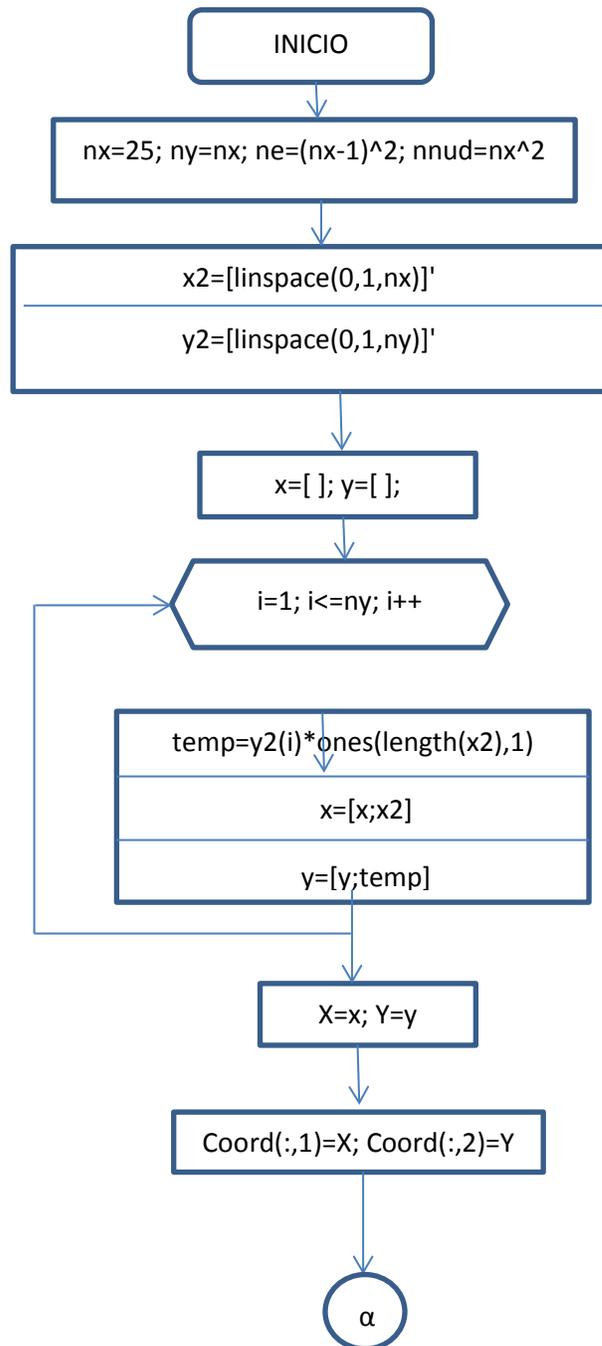
## **6. BIBLIOGRAFÍA**

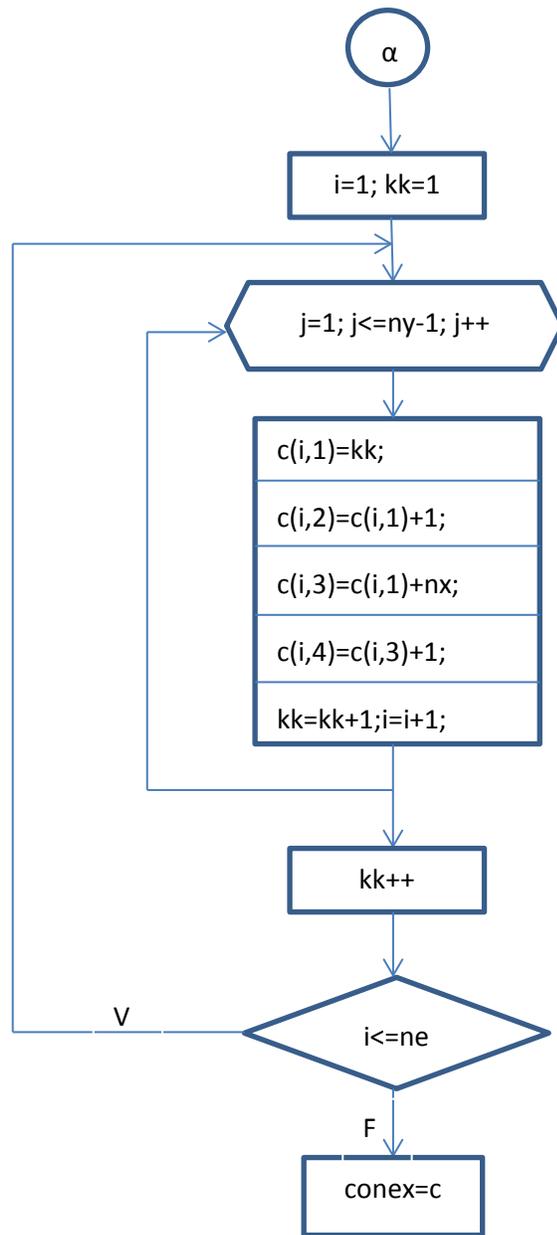
- [1] EUGENIO OÑATE IBÁÑEZ DE NAVARRA. Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos. Editorial McGraw Hill, México DF, 2006. Pp 192-28
- [2] ZIENKIEWICZ. *Método de los elementos finitos*.
- [3] CHANDRUPATLA TIRUPATHI R. *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. Ed. Prentice Hall: Pearson - 1999 .

# ANEXOS

## ALGORITMO base\_datos.m

- Definir variables a utilizar;
- Hallar coordenadas de los nodos;
- Hallar la matriz de conectividad para el ensamble de los elementos:





**ALGORITMO cuadraturaGaussLeg4.m**

- Devuelve los puntos de gauss (2 por cada eje) como vectores.
- Devuelve los pesos para realizar la cuadratura.

**ALGORITMO MatrizC.m**

- Devuelve la matriz C transformada en coordenadas del elemento maestro.
- Parámetros: Matriz V de 4x2 donde incluye las coordenadas de los nodos; e y n coordenadas de los puntos a escoger en la cuadratura.

**ALGORITMO MatrizP.m**

- Devuelve la matriz P transformada en coordenadas del elemento maestro.

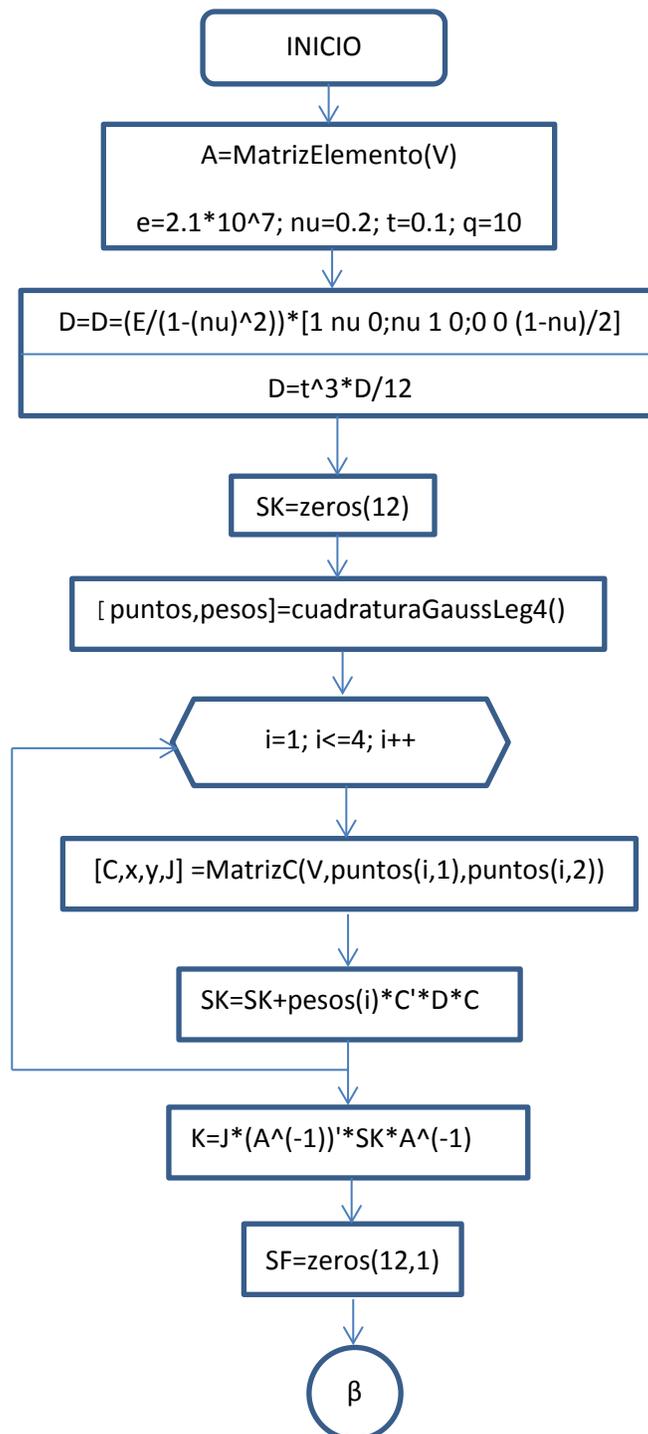
- Parámetros: Matriz V de 4x2 donde incluye las coordenadas de los nodos; e y n coordenadas de los puntos a escoger en la cuadratura.

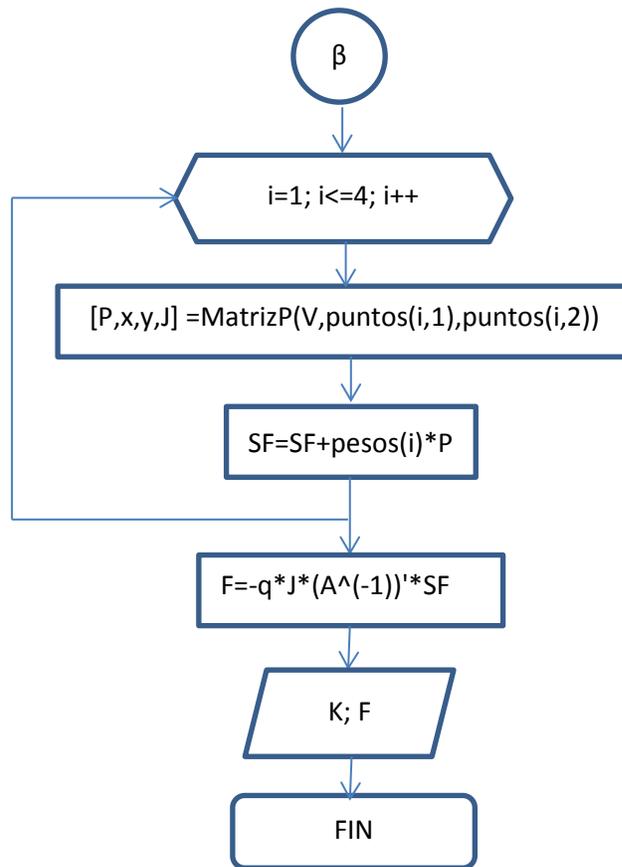
#### ALGORITMO MatrizElemento.m

- Ingresa Matriz A del elemento, sabiendo las coordenadas de los nodos en los puntos.

#### ALGORITMO KyF.m

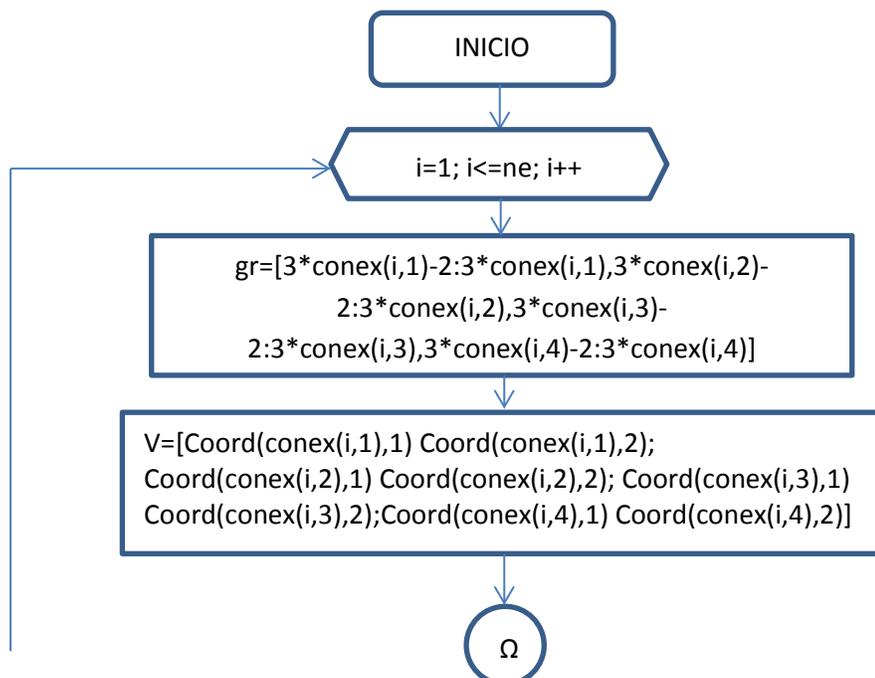
- Devuelve las Matriz de Fuerza y Rigidez del elemento.
- Parametro: Matriz V con las coordenadas locales del elemento.

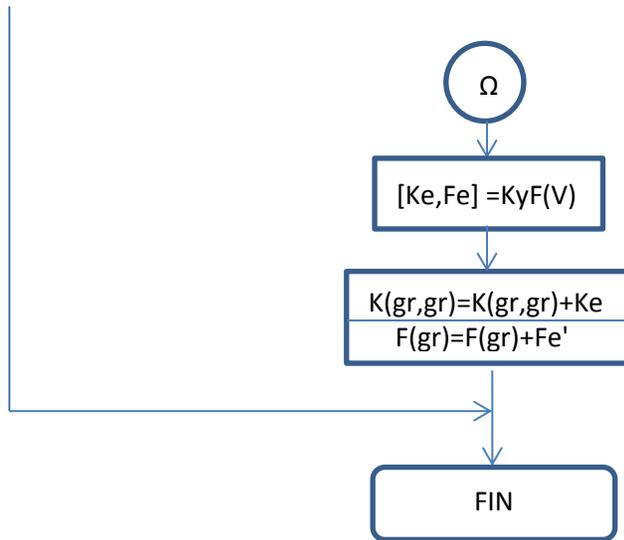




#### ALGORITMO ensambla.m

- Halla el vector V de coordenadas absolutas del elemento
- Realiza el ensamblaje de las matrices de fuerza y rigidez de los elementos:
- Parámetros: ne: número de elementos, nnud: número de nudos, conex: matriz de conexión, Coord: Matriz de coordenadas de los nudos, K: Matriz de rigidez del elemento, F: matriz de fuerzas del elemento.





**ALGORITMO Principal.m**

- Resuelve el sistema  $K*u=F$  global.
- Grafica la deformada de la curva.