



## INFORME DE PROYECTO

### CONSTRUCCIÓN DE MESA VIBRADORA PARA LA DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA DE SISTEMAS DE 1 GRADO DE LIBERTAD SOMETIDOS A EXCITACIÓN ARMÓNICA EN LA BASE CON LA AYUDA ACCELERÓMETROS DE TELÉFONOS CELULARES (SMARTPHONE).

#### CURSO: DINÁMICA (EC 114-J)

Alumnos Participantes:

	Nombre	Código
1)	DE LA CRUZ-ARAUCO-RUDY FERNANDO	20100018C
2)	AGUILAR-GIRON-HENRY JOEL	20092083J
3)	RIVEROS-YAURI-JAVIER-	20051254D
4)	RAMIREZ-GUTIERREZ-FRANK EDUARDO	20111047J
5)	SABRERA-ESPINOZA-MIGUEL ANGEL	20072612G

Profesor del Curso: MSc. Ing. LUIS RICARDO PROAÑO TATAJE

## RESUMEN

El Presente proyecto ha tenido como objetivo entrenar al alumno en la solución experimental de sistemas de 1 grado de libertad a través de la construcción de una mesa vibradora unidireccional. Los alumnos hemos logrado las competencias del proyecto a través de: 1) Solución del problema dinámico de la mesa vibradora, 2) Elaboración de planos para la mesa vibradora unidireccional, 3) Construcción de la mesa vibradora unidireccional, 4) Uso de acelerómetros de teléfonos celulares (Smartphone) para la adquisición de datos de aceleración, 5) Uso de Software para el manejo de señales de aceleración, 6) Solución experimental de sistemas de 1 grado de libertad y su comparación con las soluciones teóricas.

### 1) FUNDAMENTO TEORICO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA:

La mesa vibradora unidireccional es un dispositivo mediante el cual se puede someter a estructuras, tales como sistemas de un grado de libertad, o pórticos planos o tridimensionales, a un movimiento armónico en la base.

La mesa estará compuesta por una mesa cuadrada la cual es movida a movimientos armónicos no sinusoidales los cuales son inducidos a la misma por un disco circular que está unido a la mesa a través de una viéla que esta rotulada en ambos extremos.

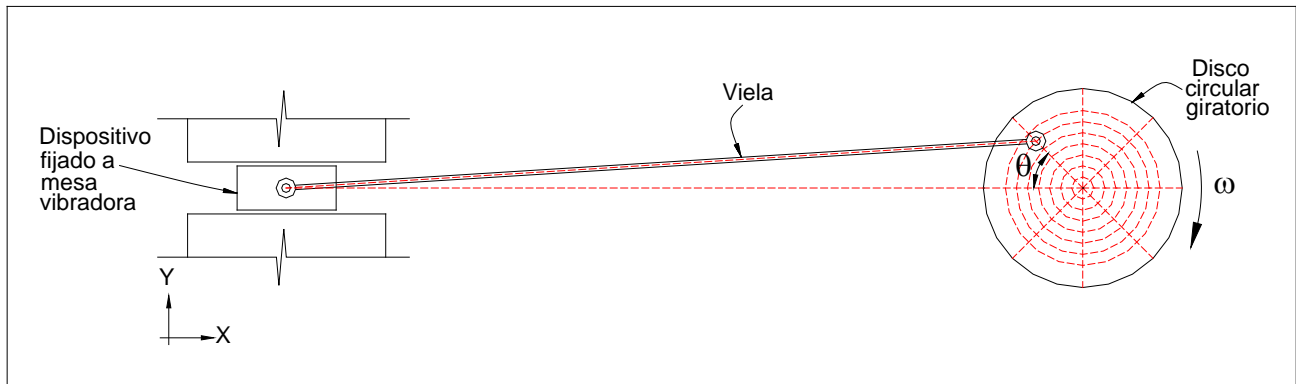


Fig. 1: Modelamiento del problema dinámico de la mesa vibradora.

Como se puede observar, a medida que el disco gira, este solo transmite al dispositivo fijado a la mesa vibradora movimientos a lo largo del eje X. La viela que conecta al disco circular y el dispositivo de la mesa vibradora está rotulado en sus extremos.

El problema dinámico a resolver, estará dado por el disco que gira a una velocidad angular  $\omega$  de radio  $r$  (punto donde se ancla la viela), el cual hace mover la viela de longitud  $L$  y que a su vez mueve el dispositivo unido a la mesa vibradora.

A continuación se calcularán los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de la mesa vibradora en función de la velocidad angular del disco.

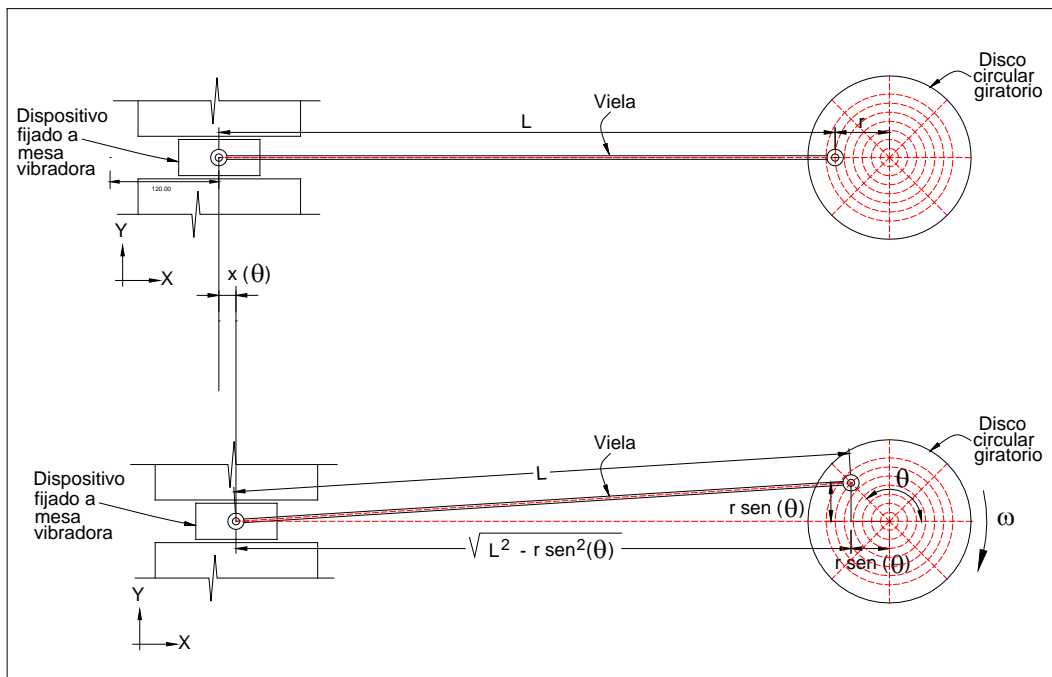


Fig. 2: Relaciones geométricas del problema dinámico de la mesa vibradora.

De la geometria de puede obtener una relación entre X y  $\theta$ :

$$(L + r) = x(\theta) + \sqrt{L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2} + r \cdot \cos(\theta)$$

La función de la posición de la mesa en función de  $\theta$ :

$$x(\theta) = (L + r) - \left[ \sqrt{L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2} + r \cdot \cos(\theta) \right]$$

Derivando respecto del tiempo, obtendremos la velocidad de la mesa:

$$\frac{d}{dt}x(\theta) = 0 - \frac{d}{dt} \left[ \sqrt{L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2} + r \cdot \cos(\theta) \right]$$

$$\frac{d}{dt}x(\theta) = - \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2 \right]^{-\left( \frac{1}{2} \right)} \cdot \left[ -2 \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{d}{dt}(\theta) \right] - r \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{d}{dt}(\theta) \right]$$

$$\frac{d}{dt}x(\theta) = \frac{d}{dt}(\theta) \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2 \right]^{-\left( \frac{1}{2} \right)} \cdot \left( 2 \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \right) + r \cdot \sin(\theta) \right]$$

sabiendo que :  $\frac{d}{dt}(\theta) = \omega$

$$\frac{d}{dt}x(\theta) = \omega \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2 \right]^{-\left( \frac{1}{2} \right)} \cdot \left[ (r^2) \cdot \sin(2 \cdot \theta) + r \cdot \sin(\theta) \right] \right]$$

Ahora, procederemos a derivar la velocidad para el calculo de la aceleración de la mesa:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(\theta) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}(\theta) \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2 \right]^{-\left( \frac{1}{2} \right)} \cdot \left( r^2 \cdot \sin(2 \cdot \theta) \right) + r \cdot \sin(\theta) \right] \right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(\theta) = \frac{d^2}{dt^2}(\theta) \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2 \right]^{-\left( \frac{1}{2} \right)} \cdot \left( r^2 \cdot \sin(2 \cdot \theta) \right) + r \cdot \sin(\theta) \right]$$

$$+ \frac{d}{dt}(\theta) \cdot \left[ \left( \frac{-1}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2 \right]^{-\left( \frac{3}{2} \right)} \cdot \left[ r^4 \cdot (\sin(2\theta))^2 \cdot \frac{d}{dt}(\theta) \right] \right]$$

$$+ \frac{d}{dt}(\theta) \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ L^2 - r^2 \cdot [\sin(\theta)]^2 \right]^{-\left( \frac{1}{2} \right)} \cdot \left[ 2 \cdot r^2 \cdot (\cos(2\theta))^2 \cdot \frac{d}{dt}(\theta) + r \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{d}{dt}(\theta) \right] \right]$$

De forma gráfica podemos presentar la posición, velocidad y aceleración para valores de  $\omega = 6 \text{ rad/seg}$ ,  $L=680\text{mm}$  y  $r = 60\text{mm}$ .

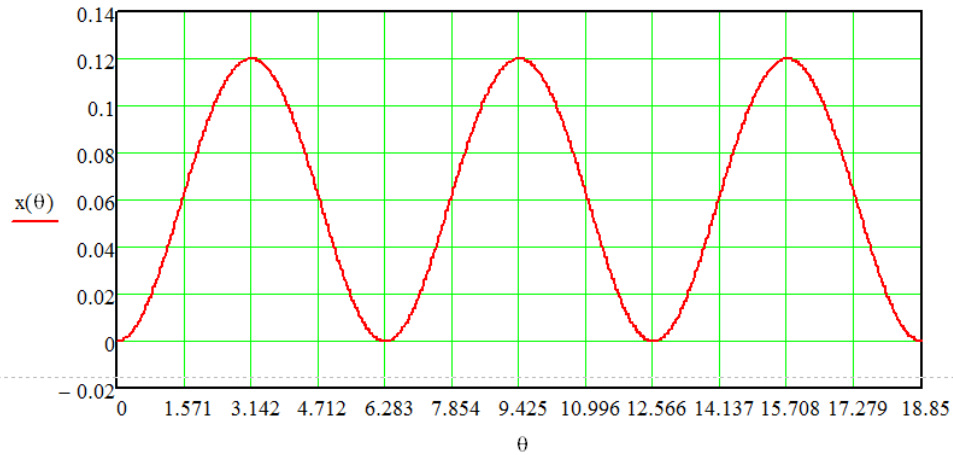


Fig. 3: Grafica del desplazamiento de la mesa vibradora en función del ángulo  $\theta$  (rad) que gira el disco.

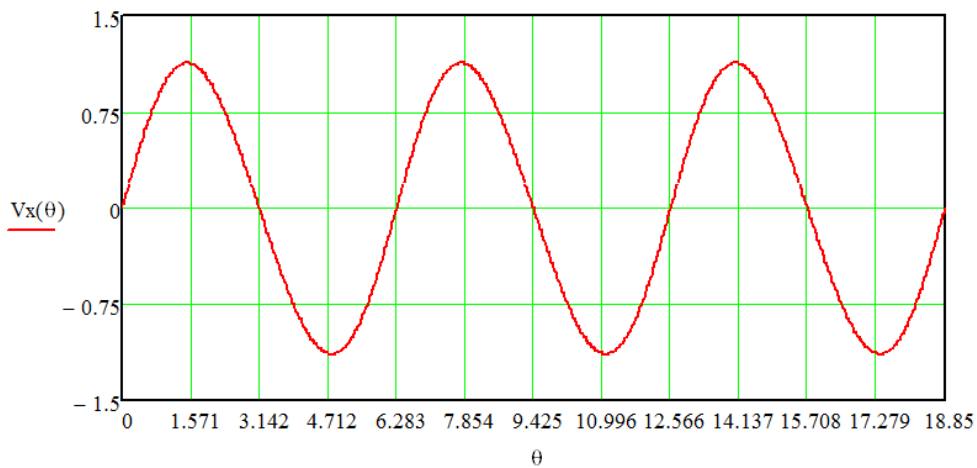


Fig. 4: Grafica de la velocidad (m/seg) de la mesa vibradora en función del ángulo  $\theta$  (rad) que gira el disco.

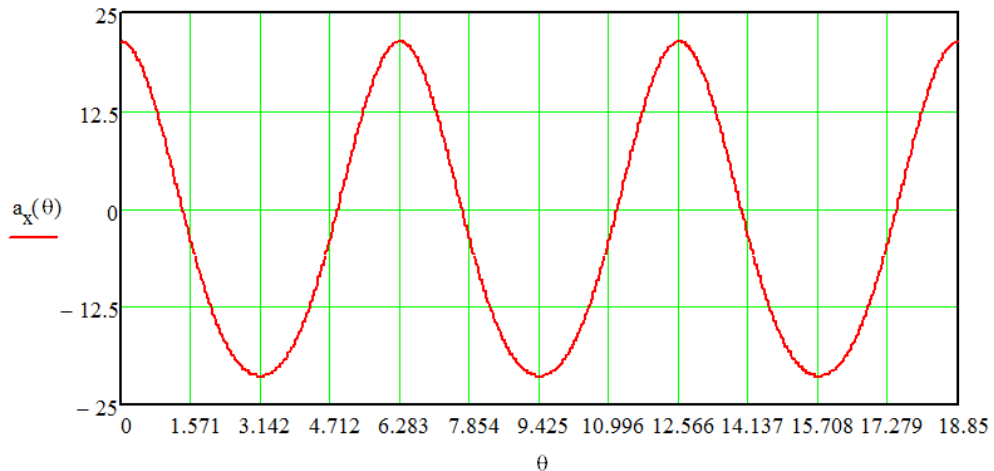
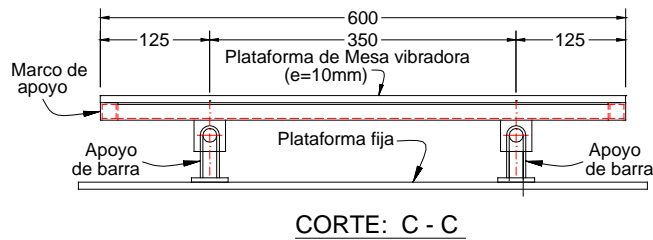
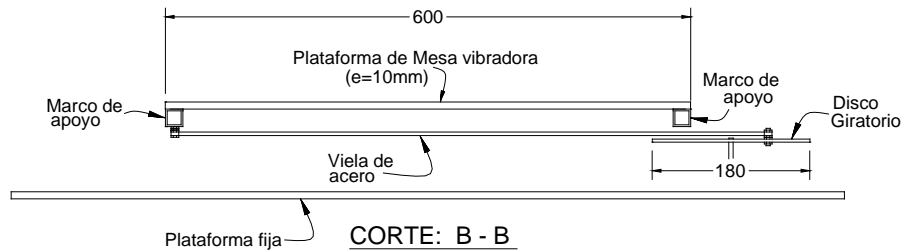
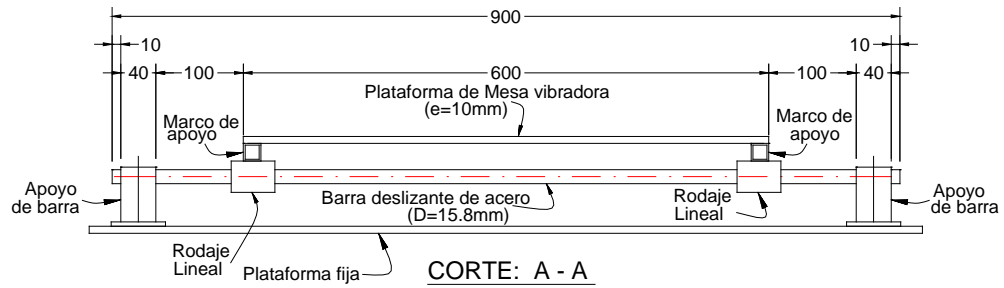
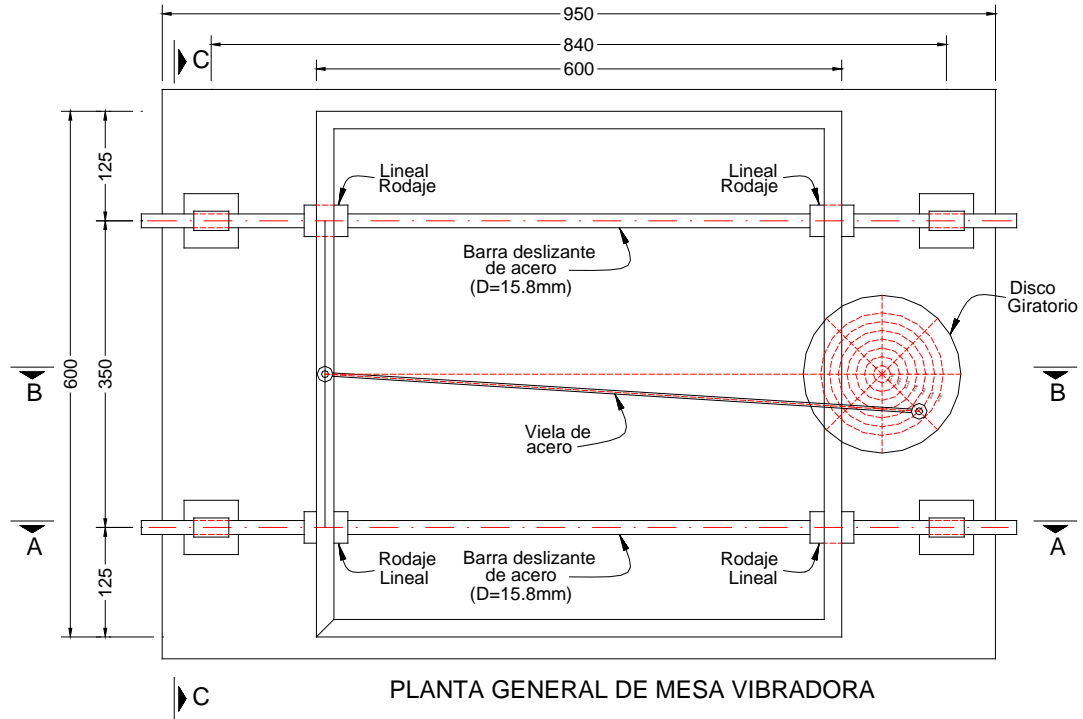


Fig. 5: Grafica de la aceleración (m/seg<sup>2</sup>) de la mesa vibradora en función del ángulo  $\theta$  (rad) que gira el disco.

## 2) PLANOS DE CONSTRUCCIÓN DE LA MESA VIBRADORA



**FIG. N°6 – Planos y esquemas de construcción de la mesa vibradora.**

### 3) CONSTRUCCIÓN DE LA MESA VIBRADORA



Foto 1: Tablero de apoyo de la mesa vibradora. Obsérvese barras de apoyo y rodajes lineales.



Foto 2: Cortes en el tablero inferior de apoyo durante la construcción.



Foto 3: vista del motor para la mesa vibradora.



Foto 4: Espacio dentro de la mesa para el motor.

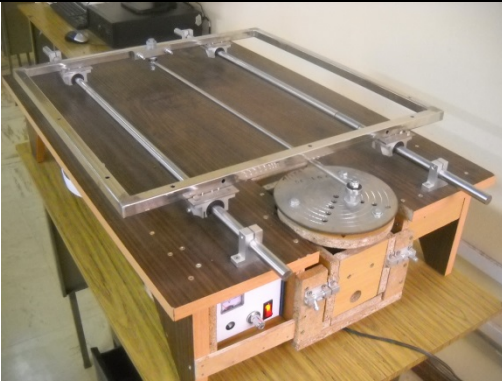


Foto 5: Vista de la mesa con el marco superior móvil. Obsérvese disco circular.



Foto 6: vista frontal de la mesa. Obsérvese a la izquierda voltímetro controlador de la velocidad.



Foto 7: Disco circular giratorio.



Foto 8: Vista final de la mesa vibradora.

#### 4) USO DE ACELEROMETROS DE TELEFONOSCELULARES (SMARTPHONE) PARA LA ADQUISICIÓN DE DATOS DE ACELERACIÓN.

Para la adquisición de datos de aceleraciones se ha utilizado los acelerómetros que vienen incorporados en teléfonos celulares tipo Smartphone.

Estos dispositivos de adquisición de datos de aceleraciones se muestran muy amigables ya que podemos obtener los datos de aceleración en unidades de  $m/s$  o porcentajes de la gravedad respectivamente. Los datos de aceleraciones que estos dispositivos traen tienen una precisión del orden de  $5.98E-4 m/s^2$ . Las aceleraciones que estos dispositivos detectan están en las tres direcciones X, Y y Z.

En las figuras que a continuación se muestran se pueden observar las direcciones en las cuales el dispositivo de adquisición de datos (Smartphone), las gráficas de aceleraciones en tiempo real. Así mismo, se muestra los gráficos de aceleración obtenidos en la mesa vibradora y las aceleraciones de una estructura de un grado de libertad amortiguada sometido a vibración libre.

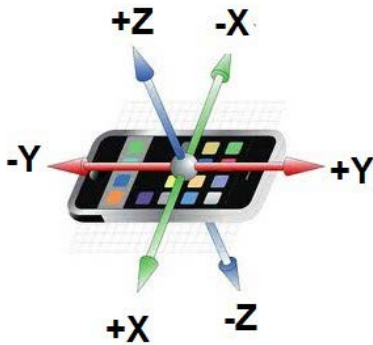


Foto 9: Direcciones en el dispositivo.



Foto 10: Aceleraciones en diferentes dispositivos.

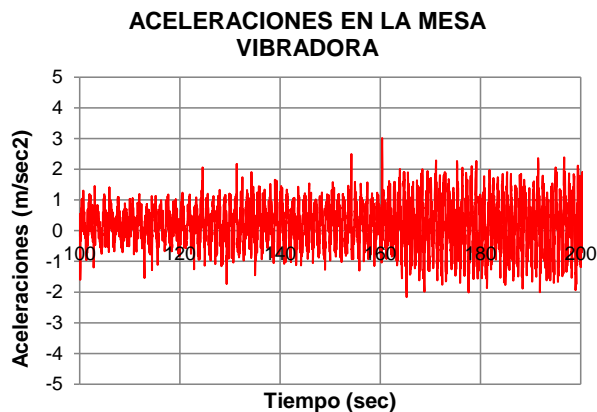


Fig.7: Aceleraciones en la mesa vibradora a diferentes frecuencias.

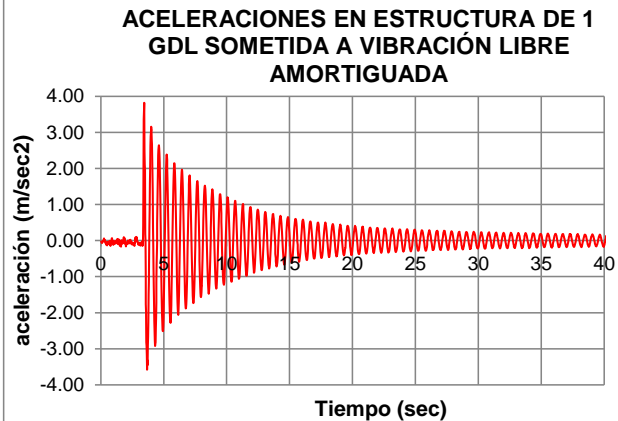


Fig.8: Aceleraciones en estructura sometida a vibración libre amortiguada.

## 5) USO SOFTWARE PARA EL MANEJO DE SEÑALES DE ACELERACIÓN

El software utilizado para el procesamiento de los datos de aceleración obtenidos de los dispositivos de adquisición de datos ha sido el programa **ViewWave** (versión 1.53, autor: T. Kashima) de uso libre con fines académicos.

Este programa permite obtener velocidades y desplazamientos a través de la integración y el procesamiento de la señal de aceleraciones. Así mismo, este programa permite filtrar señales de baja frecuencia o ruidos.

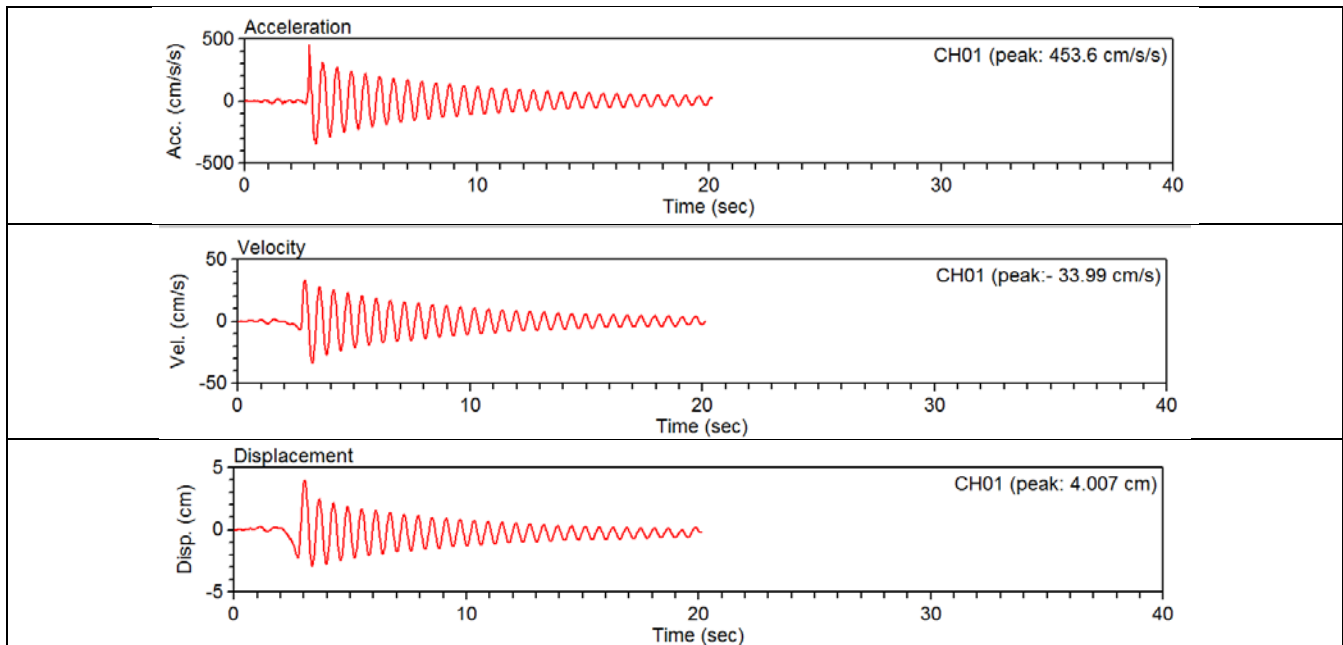


Fig.9: Aceleración, velocidad y desplazamiento mediante el software.

## 6) SOLUCIÓN EXPERIMENTAL DE SISTEMAS DE 1 GRADO DE LIBERTAD Y SU COMPARACIÓN CON LAS SOLUCIONES TEÓRICAS

### 6.1) Descripción de la estructura

La estructura de un grado de libertad estudiada en este proyecto está compuesta por 4 columnas de acero 1.2mmx15mm ancladas en su parte inferior a la mesa vibradora y en la parte superior a una losa (diafragma rígido) con una masa total  $m_0 = 3.21$  kg en la parte superior. La altura de la estructura es de 413mm. A continuación se muestran el modelo matemático (Fig.10) y la estructura real (Foto 11), ambas de un grado de libertad que se ha estudiado en el presente proyecto.



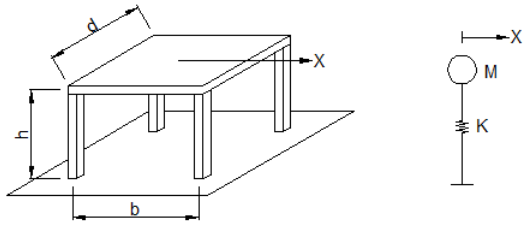


Fig.10: Esquema de modelo de 1 grado de libertad a ser analizado



Foto 11: Modelo real de 1 grado de libertad a ser estudiado.

Para el cálculo de la rigidez lateral de la estructura se sometió a una fuerza lateral de 1.55kgf obteniendo un desplazamiento lateral de la estructura del orden de 45mm. De varias mediciones como la anteriormente descrita se ha obtenido una rigidez lateral de la estructura del orden de 0.35kgf/cm.

Los resultados para la frecuencia circular  $\omega$ , periodo natural T y frecuencia son mostrados a continuación:

$\omega$ (rad/s)	T (s)	f (Hz)
10.265	0.612	1.634

## 6.2) Caso estudiado: **VIBRACION LIBRE AMORTIGUADA**

La vibración libre amortiguada está gobernada por una ecuación obtenida a través del equilibrio dinámico de la estructura amortiguada en vibración libre, según el principio de D'Lambert.

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

Fuerza inercial

Fuerza de Amortiguamiento

Fuerza del resorte

Las soluciones teóricas para este tipo de movimientos están dadas por las ecuaciones que a continuación de muestran:

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[ x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + \left( \frac{v_0 + \xi \cdot \omega \cdot x_0}{\omega_D} \right) \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \right]$$

$$v(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[ v_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) - \left( x_0 \cdot \omega_D + \xi \cdot \omega \cdot \frac{v_0 + \xi \cdot \omega \cdot x_0}{\omega_D} \right) \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \right]$$

$$a(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[ - \left[ x_0 \cdot \omega_D^2 + \xi \cdot \omega \cdot (v_0 + \xi \cdot \omega \cdot x_0) + \xi \cdot \omega \cdot v_0 \right] \cdot \cos(\omega_D \cdot t) - \left[ v_0 \cdot \omega_D - \xi \cdot \omega \cdot \left[ x_0 \cdot \omega_D + \left( \xi \cdot \omega \cdot \frac{v_0 + \xi \cdot \omega \cdot x_0}{\omega_D} \right) \right] \right] \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \right]$$

Las respuestas experimentales de las aceleraciones en la masa de la estructura estudiada son mostradas en la Fig.11, a través de la utilización del programa ViewWave se han obtenido las respuestas de las velocidades y desplazamientos en la estructura y son mostradas en las Fig.12 y Fig. 13.

La comparación de las respuestas de desplazamientos en la estructura de forma teórica y experimental es mostrada en la figura Fig.14. Se puede observar la disminución de la respuesta de desplazamientos debido al amortiguamiento, esta reducción en el desplazamiento ciclo a ciclo durante la vibración libre es debida al amortiguamiento de la estructura y es conocida como DECREMENTO LOGARIMICO en la respuesta.

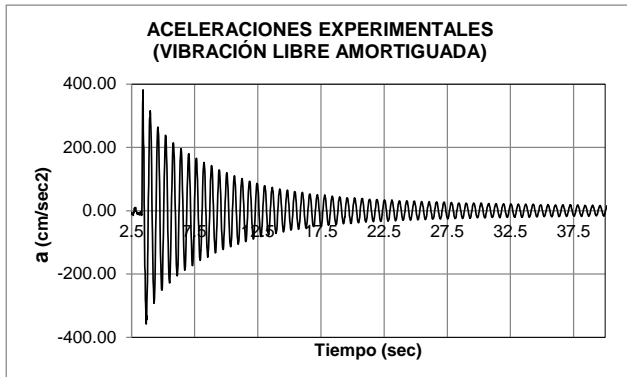


Fig.11 : Aceleraciones experimentales

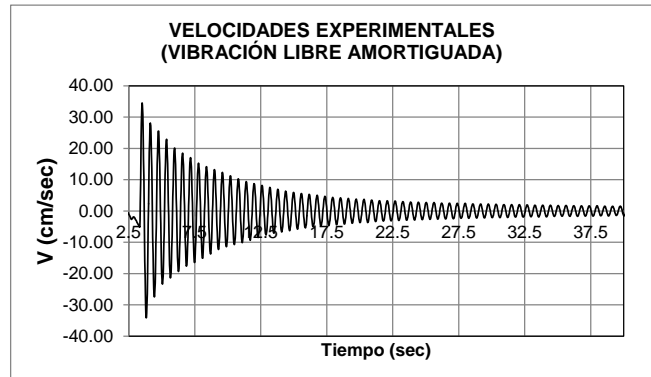


Fig.12 : Velocidades experimentales

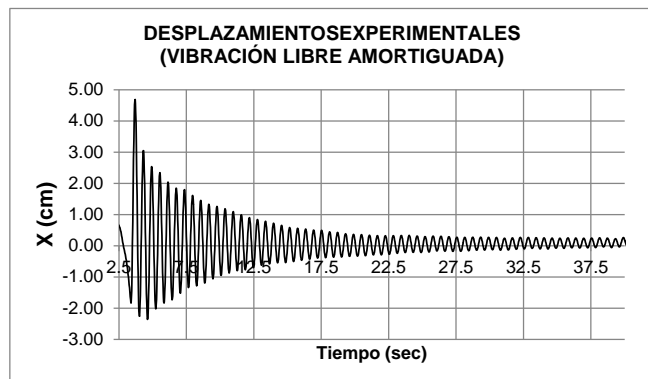


Fig. 13 : Desplazamientos experimentales

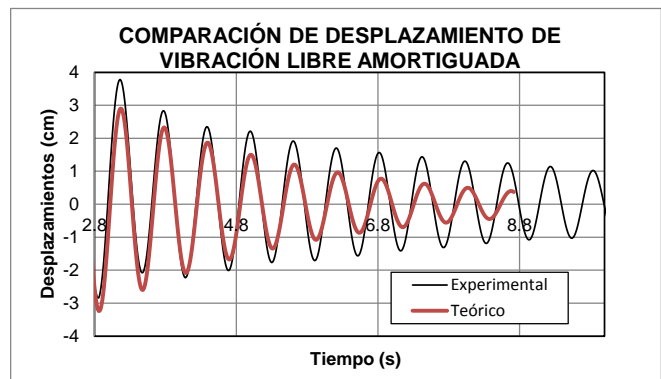


Fig.14: Comparación de desplazamientos. Teórico vs. Experimental.

De los gráficos de desplazamientos de ha obtenido de forma experimental que el periodo de la estructura amortiguada es de 0.612seg y la frecuencia circular amortiguada de 10.258rad/seg. Estos valores son muy similares a los del periodo y frecuencias circulares naturales.

En el presente proyecto se ha medido el decremento logarítmico en diferentes ensayos para hallar el PORCENTAJE DE AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO REAL de la estructura. Los resultados para este parámetro son mostrados en la siguiente tabla.

Tabla N 1: Obtención del porcentaje de amortiguamiento crítico.

Desplazamientos máximos						
	Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3	Ciclo 4	Ciclo 5	Ciclo 6
Desplazamientos	4.0363	2.392	1.8824	1.6943	1.3858	1.1917
	2.392	1.8824	1.6943	1.3858	1.1917	1.1437
% de amortiguamiento	0.0833	0.0382	0.0168	0.0320	0.0240	0.0065

El valor del % amortiguamiento crítico tomado ha sido el promedio de los valores indicados en la tabla anterior  $\varepsilon = 3.3\%$ . De acuerdo a esto el coeficiente de amortiguamiento  $c$  de la estructura tiene un valor de:

$$c = 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot m_0 = 2.306 \frac{\text{S}}{\text{m}} \text{ N}$$

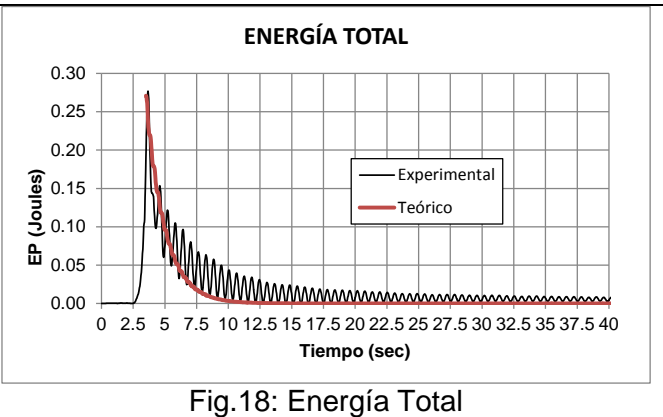
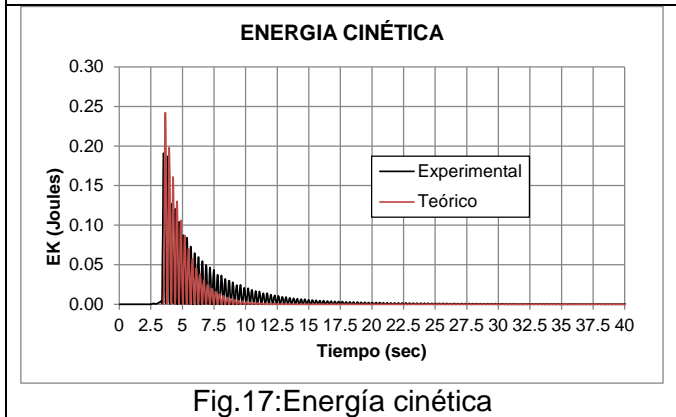
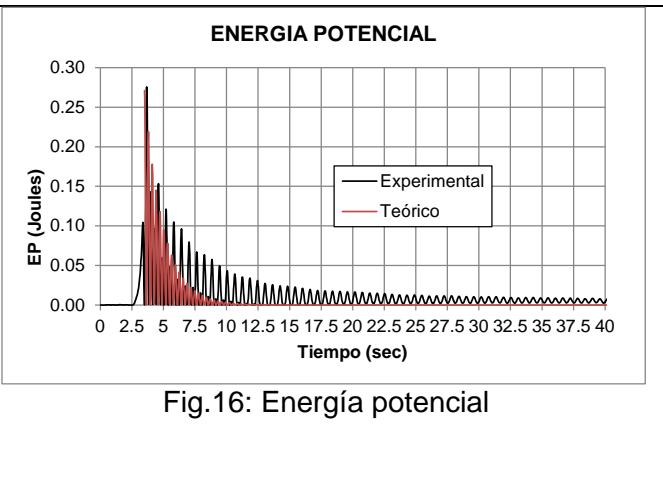
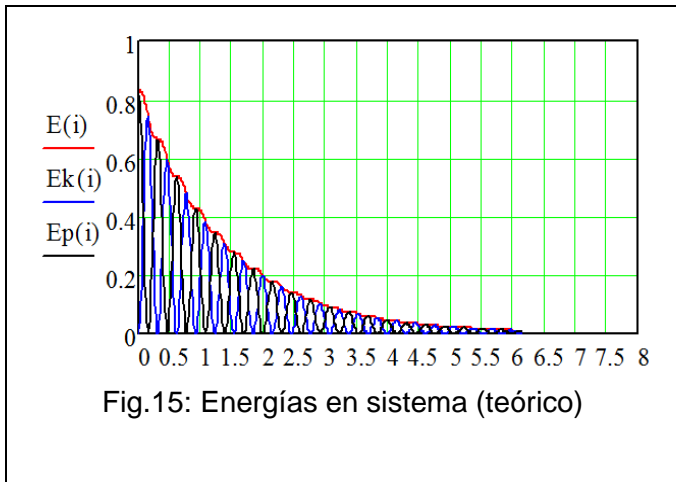
LA ENERGIA DISIPADA en la vibración libre amortiguada ha sido obtenida de acuerdo a las expresiones:

$$E_p(i) = \frac{1}{2} \cdot K_{\text{Sistema}} \cdot x^2 \quad (\text{Energía Potencial})$$

$$E_k(i) = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2 \quad (\text{Energía cinética})$$

$$E_{\text{Total}} = E_p + E_k \quad (\text{Energía Total})$$

De los resultados teóricos y experimentales se ha obtenido estas energías antes mencionadas de forma numérica y presentamos los siguientes gráficos de las mismas.



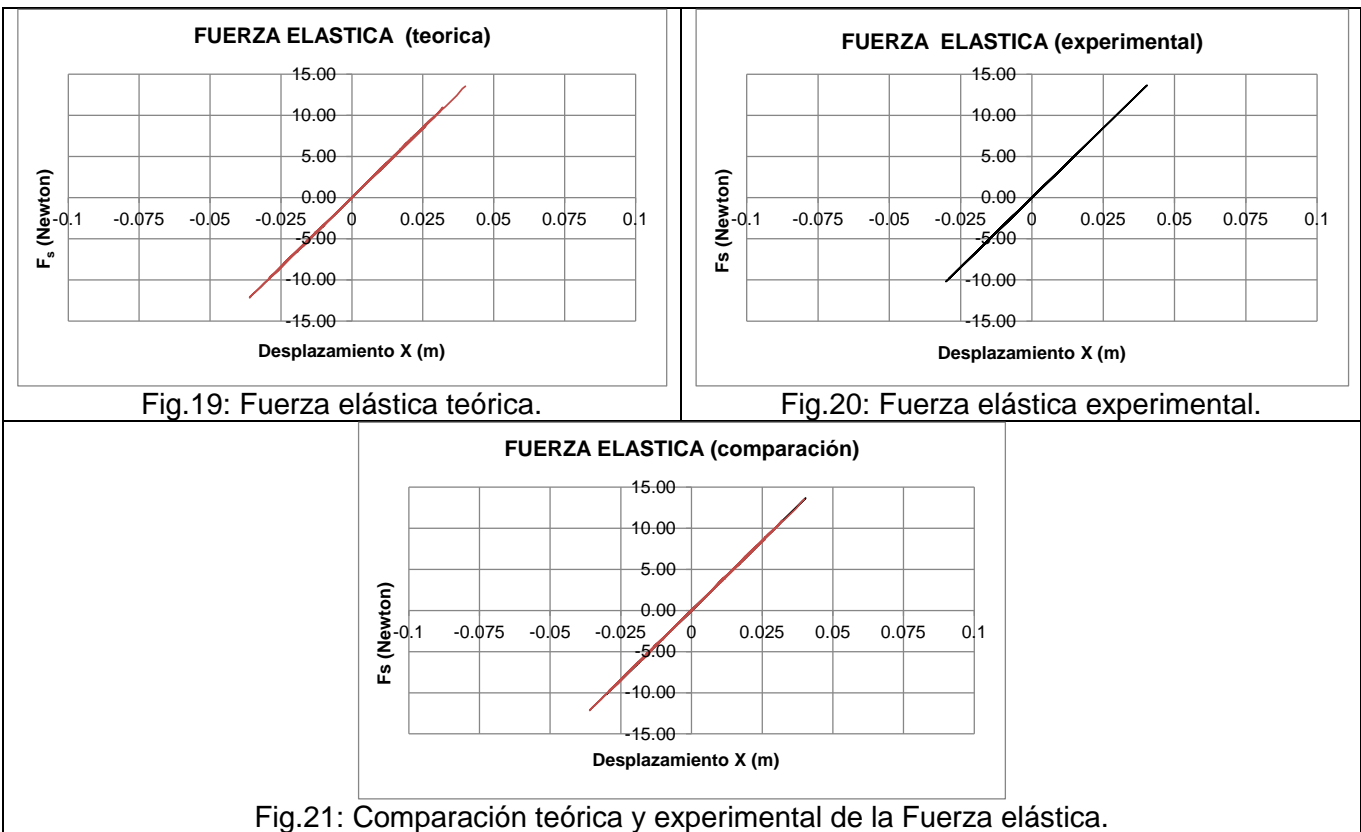
LAS FUERZAS EN EL SISTEMA durante la vibración libre amortiguada se calcularon también de forma teórica y experimental. Las fuerzas en el sistema son: 1) La fuerza Inercial en la masa de la estructura, 2) La fuerza de amortiguamiento y 3) la fuerza elástica debido a la rigidez de la estructura. Estas fuerzas en la estructura pueden ser calculadas a través de las siguientes formulaciones:

$$F_i = m_0 \cdot a \quad (\text{Fuerza Inercial})$$

$$F_d = c \cdot v \quad (\text{Fuerza de Amortiguamiento})$$

$$F_s = K_{\text{Sistema}} \cdot x \quad (\text{Fuerza Elastica})$$

Estas fuerzas han sido calculadas en la vibración libre amortiguada para cada instante de tiempo y sus graficas de muestran a continuación:



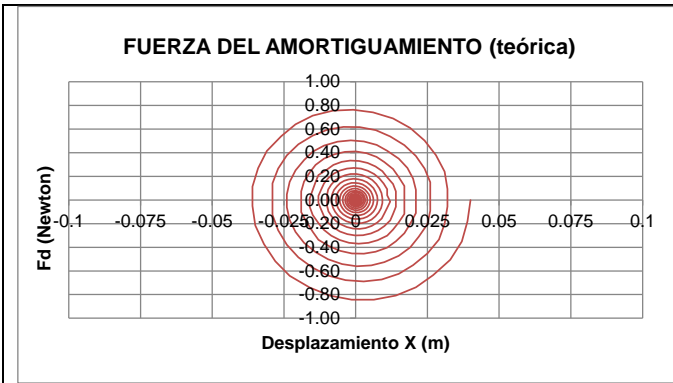


Fig.22: Fuerza del amortiguamiento teórica.

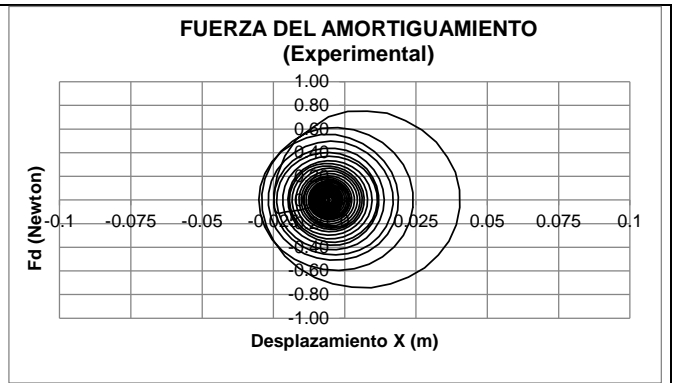


Fig.23: fuerza del amortiguamiento experimental.

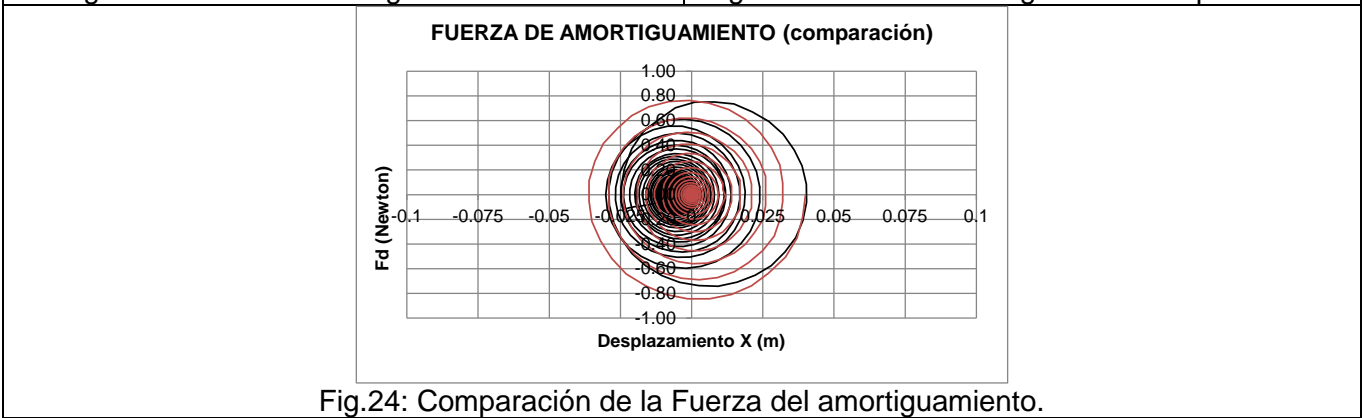


Fig.24: Comparación de la Fuerza del amortiguamiento.

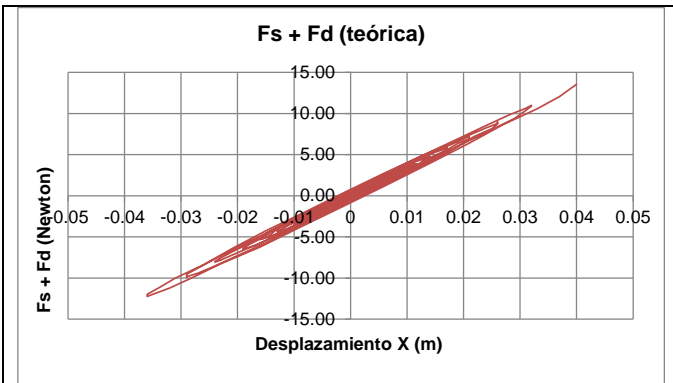


Fig.25:  $F_s + F_d$  (teórica).

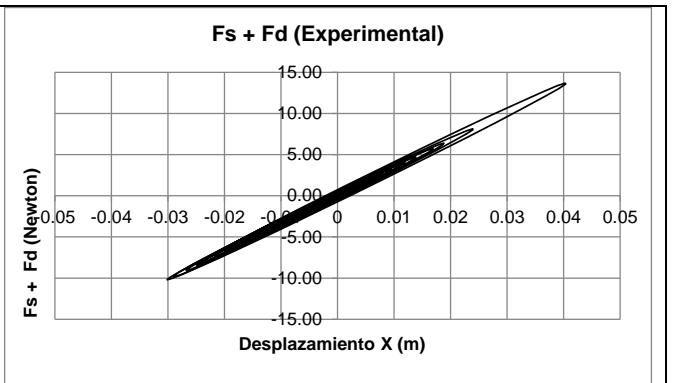


Fig.26:  $F_s + F_d$  (experimental).

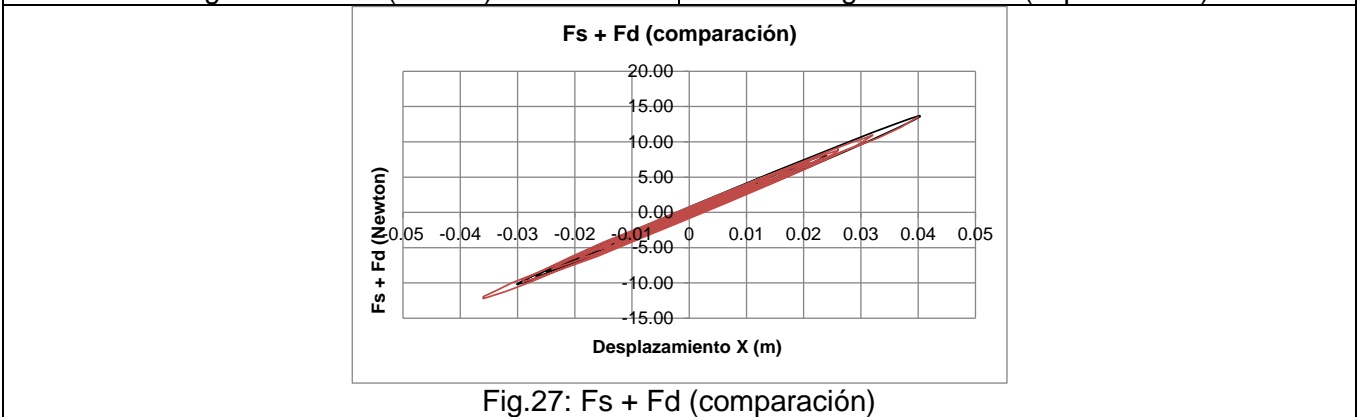


Fig.27:  $F_s + F_d$  (comparación)

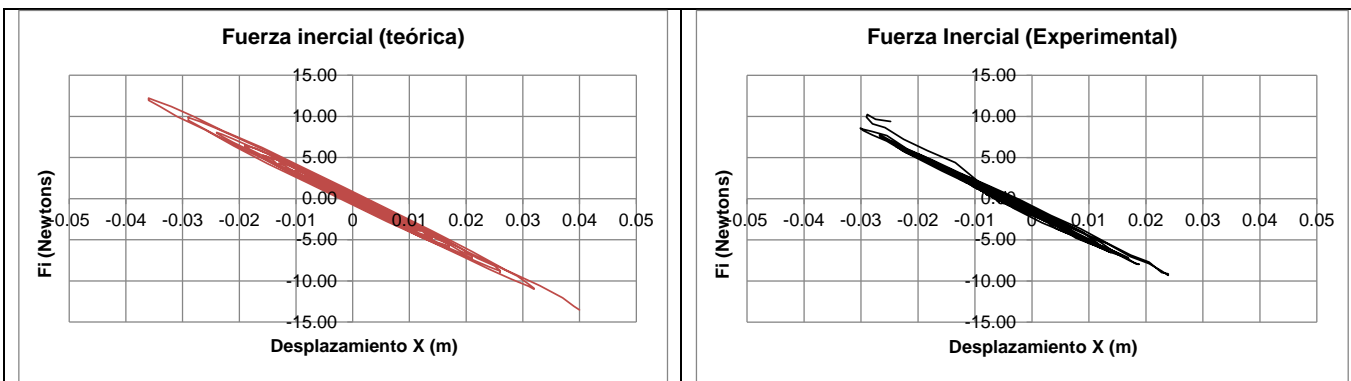


Fig.28: Fuerza inercial teórica.

Fig.29: Fuerza inercial experimental.

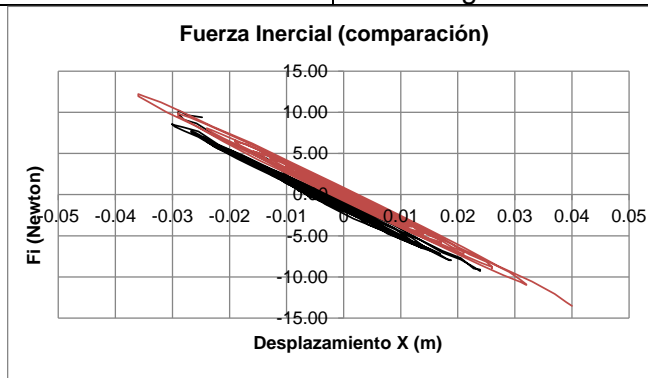


Fig.30: Fuerza inercial comparación.

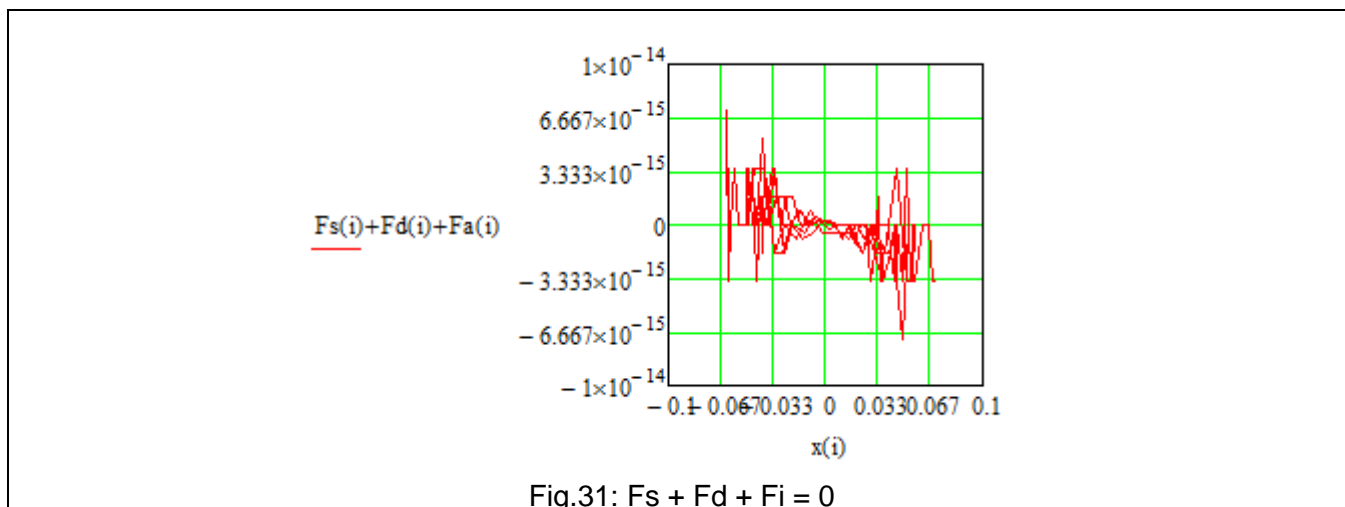


Fig.31:  $F_s + F_d + F_i = 0$

## 7) Conclusiones:

- 7.1 La mesa vibradora unidireccional por el mecanismo interno tiene un movimiento armónico no sinusoidal.
- 7.2 La lectura de las aceleraciones se realizó con dispositivos de uso común (teléfonos Smartphones) y ha resultado de mucha utilidad para el análisis de estructuras con fines académicos.

- 7.3 El uso de Software para el procesamiento de datos de aceleración ha sido muy útil para el cálculo de las velocidades y desplazamientos reales en la estructura.
- 7.4 Se ha analizado una estructura de 1 grado de libertad sometido a vibración libre amortiguada y se han obtenido lo siguiente:
- 7.4.1 La energía total almacenada en la estructura decrece con el tiempo hasta que se vuelve nula cuando la estructura de detiene de forma natural.
  - 7.4.2 La energía potencial y cinética en la estructura tienen forma similar y decrecen con el tiempo. Así mismo, los picos de la energía potencial están desfasados de los picos de la energía cinética. Esto quiere decir que cuando el sistema tiene almacenada toda la energía de forma potencial la energía cinética en ese instante es nula. De forma análoga sucede cuando la energía del sistema es almacenada de forma cinética entonces a energía potencial es nula.
  - 7.4.3 La fuerza elástica de la estructura  $F_s$  es lineal con respecto a los desplazamientos.
  - 7.4.4 La fuerza del amortiguamiento tiene forma de espiral o helicoides con respecto de los desplazamientos.
  - 7.4.5 La curva de la suma de fuerzas de amortiguamiento y la elástica tiene forma de loops histeréticos y la energía disipada por la estructura en cada loop es igual al área encerrada en un gráfico de fuerza vs. Desplazamientos.
  - 7.4.6 La suma de las fuerzas inerciales con las fuerzas elásticas y del amortiguamiento son nulas ya que la estructura ha sido excitada en vibración libre y no ha habido fuerzas externas en la estructura ya que solo se le sometió a un desplazamiento inicial.

## Bibliografía

Dinámica de estructuras: Sistemas de un grado de libertad – Juan Carlos Botero Palacio - Primera edición : abril de 2011.

Dinámica – R.C.Hibbeler – Decimosegunda edición, 2010

Dinámica Estructural – Mario Paz – Traducción de la tercera edición

Dynamics of structures: Theory and applications of Earthquake Engineering – Anil K. Chopra – 1995 edition